

CONTROL #1

1.- Sea $P_n(R)$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n , sobre el cuerpo de los reales.

Sea $m > n \geq 1$ y x_1, \dots, x_m m reales distintos.

Para $1 \leq p < +\infty$ se define:

$$\| \cdot \|_p : P_n(R) \rightarrow R \text{ definida por, } \|Q\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |Q(x_i)|^p \right)^{1/p}$$

- a) Demuestre que $\| \cdot \|_p$ es una norma en el espacio vectorial $P_n(R)$. (3 pts.)
- b) Demuestre que para $p=2$, $\| \cdot \|_p$ proviene de un producto interno. Determínelo. (1 pto.)
- c) Muestre que si $p \neq 2$, entonces $\| \cdot \|_p$ no proviene de un producto interno. (2 pts.).

Indicación:

Puede usar la siguiente desigualdad:

$$\left(\sum_{i=1}^n |u_i + v_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}, \text{ donde } u_i, v_i \in R.$$

Para la parte c) considere: $Q_1 = 1, Q_2 = x, x_1 = 1, x_2 = -1$

2.-

- a) Pruebe que toda norma $\| \cdot \|$ en R es de la forma $\|x\| = a|x|$ donde $a > 0$. con $|x|$: valor absoluto de x .
- b) Concluya que toda norma en R proviene de un producto interno. Determínelo.
- c) Sea R^n dotado de la métrica 0-1. Muestre que las bolas en este espacio son conjuntos de un solo elemento, o bien, de todo el espacio. ¿Existen puntos de acumulación? Comente.

3.-

a) Sea $A = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 > 1/4\} \cup S$, donde S es el segmento del eje x tal que $1 \leq x < 2$. Determine si A es abierto o cerrado y encuentre el interior, la adherencia y la frontera de A .

b) Sea $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

- i) Encuentre el dominio de f . Grafique
- ii) Justifique por qué f es función. Es biyectiva?
- iii) Encuentre las curvas de nivel de f . Grafique.

4.- Para las siguientes funciones analice la existencia de límite en $(0,0)$.

a) $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\} - \{(0,0)\}$ $f(x, y) = \frac{xy^{3/2}}{x^2 + y^3}$

b) $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$ $f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{(x^5 + y^5)^{4/5}}$

c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$

Control #1

1) a) $\| \cdot \|_p$ es norma.

N1) $0 \leq \| \cdot \|_p < +\infty$

$\forall q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ $|q(x_i)|$ es acotado

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{i=1}^m |q(x_i)|^p < +\infty \Rightarrow 0 \leq \left(\sum_{i=1}^m |q(x_i)|^p \right)^{1/p} < +\infty$$

N2)

$q(x) = 0 \Rightarrow \|q(x)\|_p$ directo

$\|q(x)\|_p = 0 \Rightarrow q(x) = 0$

En efecto

$\|q(x)\|_p = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m |q(x_i)|^p = 0 \Rightarrow \forall i=1, \dots, m \quad |q(x_i)|^p = 0$

$\Rightarrow q(x_i) = 0 \quad \forall x_i \quad i=1, \dots, m$

$\Rightarrow x_i$ es raíz del polinomio de grado n , pero son $m > n$ raíces

$\Rightarrow q(x) = 0$

N3) $\| \lambda q(x) \|_p = \left(\sum_{i=1}^m |\lambda q(x_i)|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^m |q(x_i)|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|q(x)\|_p$

N4)

$\|q(x) + r(x)\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |q(x_i) + r(x_i)|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^m |q(x_i)|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^m |r(x_i)|^p \right)^{1/p}$

por
indicación

$\leq \|q(x)\|_p + \|r(x)\|_p$

$\therefore \| \cdot \|_p$ es norma en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

b) Si $\|\cdot\|_p$ con $p=2$ proviene de un producto interno entonces cumple:

$$\|q(x)+r(x)\|_2^2 + \|q(x)-r(x)\|_2^2 = 2(\|q(x)\|_2^2 + \|r(x)\|_2^2)$$

Dem:

$$\|q(x)+r(x)\|_2^2 + \|q(x)-r(x)\|_2^2$$

$$= \sum_{i=1}^m |q(x_i)+r(x_i)|^2 + \sum_{i=1}^m |q(x_i)-r(x_i)|^2 \quad \text{pero } |x|^2 = x^2$$

$$= \sum_{i=1}^m q(x_i)^2 + r(x_i)^2 + 2q(x_i)r(x_i) + q(x_i)^2 + r(x_i)^2 - 2q(x_i)r(x_i)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^m q(x_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^m r(x_i)^2 = 2(\|q(x)\|_2^2 + \|r(x)\|_2^2)$$

Luego $\|\cdot\|_2$ proviene de un producto interno.

$$\langle q, r \rangle = \frac{1}{4} (\|q+r\|_2^2 - \|q-r\|_2^2) = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^m (q(x_i)+r(x_i))^2 - (q(x_i)-r(x_i))^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m 4q(x_i)r(x_i) = \boxed{\sum_{i=1}^m q(x_i)r(x_i) = \langle q(x), r(x) \rangle}$$

c) Si $p \neq 2$ no proviene de un producto interno.

En efecto si tomamos el contraejemplo

$$q(x) = 1$$

$$r(x) = x$$

$$\text{con } \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$$

$$\|q+r\|_p^2 + \|q-r\|_p^2 = 2(\|q\|_p^2 + \|r\|_p^2)$$

$$\|q+r\|_p^2 = \left(\sum_{i=1}^2 |q(x_i)+r(x_i)|^p \right)^{2/p} = (|1+1|^p + |1-1|^p)^{2/p} = 2^2 \rightarrow 2^3$$

$$\|q-r\|_p^2 = \left(\sum_{i=1}^2 |q(x_i)-r(x_i)|^p \right)^{2/p} = (|1-1|^p + |1-(-1)|^p)^{2/p} = 2^2$$

$$2^3 \neq 2^{\frac{2+2p}{p}}$$

Si $p \neq 2$

$$2(\|q\|_p^2 + \|r\|_p^2) = 2 \left((1^p + 1^p)^{2/p} + (1^p + 1^p)^{2/p} \right)$$

$$= 2 \left(2^{2/p} + 2^{2/p} \right) = 2 \cdot 2 \cdot 2^{2/p} = 2^{\frac{2}{p}+2} = 2^{\frac{2+2p}{p}}$$

b) $\|x\| = a|x|$, $a > 0$ proviene de un producto interno

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= a^2|x+y|^2 + a^2|x-y|^2 = a^2((x+y)^2 + (x-y)^2) \\ &= a^2(x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + y^2 - 2xy) \\ &= a^2(2x^2 + 2y^2) = 2(a^2|x|^2 + a^2|y|^2) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|x\| = a|x|$ proviene de un producto interno.

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4}a^2(|x+y|^2 - |x-y|^2) \\ &= \frac{a^2}{4}(x^2 + y^2 + 2xy - x^2 - y^2 + 2xy) = \frac{4a^2xy}{4} \Rightarrow \boxed{\langle x, y \rangle = a^2xy}\end{aligned}$$

$$c) B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n / \|x-y\| < \delta\} \quad \text{con } \|x\| = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

Si $\delta < 1$

$$\Rightarrow \|x-y\| < 1 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow B(x, \delta) = \{x\}$$

Si $\delta > 1$

$$\Rightarrow \|x-y\| < 1 < \delta$$

$$\Rightarrow \|x-y\| = 1 \vee \|x-y\| = 0$$

\downarrow

$x \neq y$

\Downarrow

$x=y$

$$B(x, \delta) = \mathbb{R}^n$$

Puntos de acumulación

• $B(x, \delta)$ con $\delta < 1$ no tienen puntos de acumulación

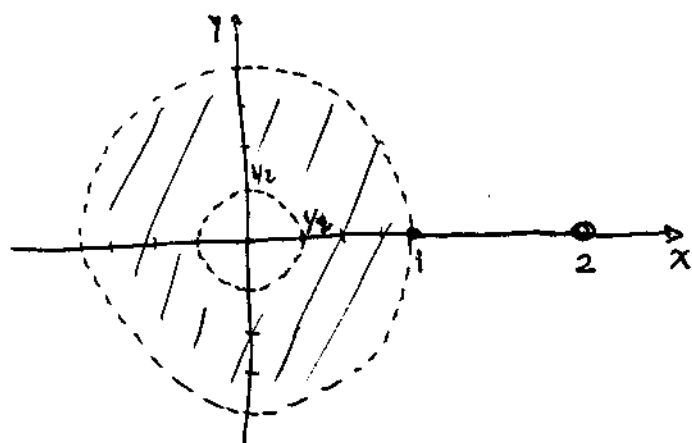
• $B(x, \delta)$ con $\delta > 1$, $B(x, \delta) = \mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow \forall x$, x es punto de acumulación.

Control #1

3)

a) $A = \{ (x,y) / x^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 > \frac{1}{4} \} \cup S$

$S = \{ (x,0) / 1 \leq x < 2 \}$



- A no es abierto ($\text{Int } A \neq A$)

- A no es cerrado. ($\text{Adh } A \neq A$)

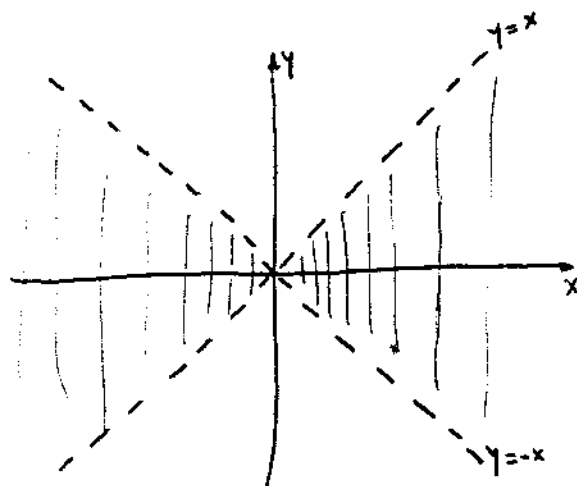
$\text{Int}(A) = \{ (x,y) / \begin{matrix} x^2 + y^2 < 1 \\ x^2 + y^2 > \frac{1}{4} \end{matrix} \}$

$\text{Adh}(A) = \{ (x,y) / \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \end{matrix} \} \cup \{ (x,0) / 1 \leq x \leq 2 \}$

$\text{Fr}(A) = \{ (x,y) / \begin{matrix} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{matrix} \} \cup \{ (x,0) / 1 \leq x \leq 2 \}$

b) $f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

i) Dominio f : $x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 > y^2$



ii) f es función ya que $\forall \vec{x} \in \text{Dom } f \exists ! f(\vec{x})$

f no es biyectiva.

En efecto $f(5,4) = \frac{4}{\sqrt{5^2 - 4^2}} = \frac{4}{3}$

$f(-5,4) = \frac{4}{\sqrt{(-5)^2 - 4^2}} = \frac{4}{3}$

Control #1

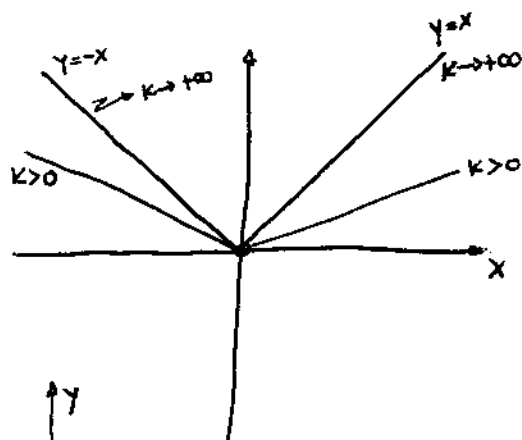
3) b)

iii) Curvas de nivel

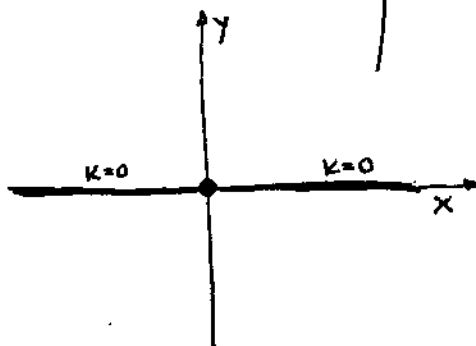
$$f(x, y) = k$$

Caso 1: $k > 0 \Rightarrow y > 0$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} = k \Rightarrow y^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2}} x^2$$

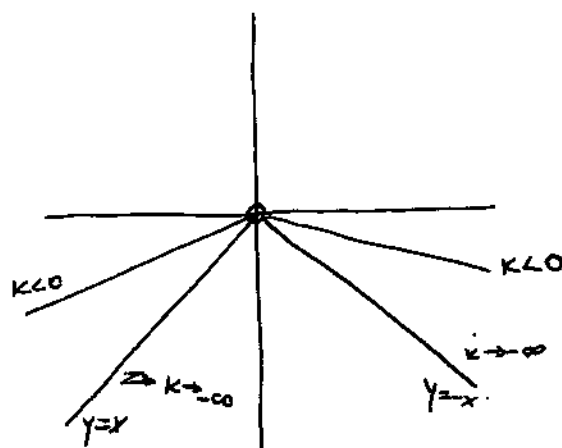


Caso 2: $k = 0 \Rightarrow y = 0, x \neq 0$



Caso 3: $k < 0 \Rightarrow y < 0$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} = k \Rightarrow y^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2}} x^2$$



Control #1

4)

a) $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0 \} \setminus \{ (0, 0) \}$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{x y^{3/2}}{x^2 + y^3}$$

Si tomamos el "camino" $\begin{matrix} x=0 \\ y=y \end{matrix}$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

Si tomamos el camino

$$\begin{matrix} x^2 = y^3 \\ y = y \end{matrix} \text{ con } y \geq 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^{3/2} y^{3/2}}{y^3 + y^3} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^3}{2y^3} = \frac{1}{2}$$

Luego
no existe

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x})$$

b) $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \}$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{x^3 y^3}{(x^5 + y^5)^{1/5}}$$

Tomemos el "camino" $y = \lambda x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \lambda^3 x^3}{(x^5 + \lambda^5 x^5)^{1/5}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda^3 x^6}{x^4 (1 + \lambda^5)^{1/5}} = \frac{\lambda^3}{(1 + \lambda^5)^{1/5}} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Probamos que $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x}) = 0$.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - 0| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x^3 y^3}{(x^5 + y^5)^{1/5}} \right| < \left| \frac{x^3 y^3}{(2 x^{5/2} y^{5/2})^{1/5}} \right| = \left| \frac{x^3 y^3}{2^{1/5} x^2 y^2} \right| = \frac{1}{2^{1/5}} |x y| < |x y| < \|\vec{x}\|_\infty^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

Sabemos que

$$(x^{5/2} - y^{5/2})^2 \geq 0$$

$$x^5 + y^5 \geq 2 \cdot x^{5/2} \cdot y^{5/2}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \sqrt{\varepsilon}$$

$$\therefore \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x}) = 0$$

Control #1

4)

c)

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

El candidato obvio para el límite es 0
Probamos por definición

$$\left| \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right| < \left| \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right| < \left| \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\vec{x}\|_2 < \delta = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$